

ANALISA MATRIKS KEKAKUAN PADA BALOK NON PRISMATIS DENGAN MENGGUNAKAN PRINSIP ELEMEN HINGGA

Christiani Chandra Manubulu

*Program Studi Sipil, Fakultas Teknik, Universitas Katolik Widya Mandira, Jl. A. Yani 50-52
email:christianichandra@gmail.com*

Abstrak: Dalam perencanaan struktur, perencana sering memilih bentang prismatis yang seragam sepanjang bentangan struktur. Namun terkadang untuk beberapa keperluan pemilihan penampang non prismatis tidak dapat dihindari sehingga perlu dilakukan analisa matriks kekakuan pada balok non prismatis untuk mempermudah dan mempercepat perhitungan dalam analisa struktur. Penampang balok prismatis yang dipilih dalam penelitian ini adalah balok sederhana pada satu panjang bentang namun memiliki bentuk geometri dan jenis bahan yang berbeda. Hasil dari penelitian ini adalah diperolehnya persamaan kekakuan struktur untuk balok non prismatis yang dipengaruhi oleh nilai modulus elastisitas yang menggambarkan jenis bahan, dan juga luasan dan panjang bentang yang menggambarkan geometri dari penampang balok non prismatis.

Kata Kunci: Balok Non Prismatis, Kekakuan Struktur, Metode Elemen Hingga

Abstract: In structural planning, planners often choose a uniform landscape across a stretch of structure. But sometimes for certain contour selection of non-prismatic views, it is necessary to analyze the rigour matrix on the non-prismatic beam to make it easier and faster for calculations in structural analysis. The prismatic beam viewer selected in this study is a simple beam at one long landscape but has a distinct geometric form and type of material. The results of this study are the results of the rigour structure for a non-prismatic beam affected by the value of modulus elasticity that describes the type of material, as well as the broad and long landscape that describes the geometry of a non-prismatic beam viewer.

Key words: Non-Prismatic Beam, Structural Rigidity, Finite Elements Method

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Metode Elemen Hingga adalah metode numerik untuk mendapatkan solusi permasalahan diferensial, baik persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equatiao*n) maupun persmaan diferensial biasa (*Partial Differential Equatio*an). Karena persamaan differensial seringkali digunakan sebagai model permasalahan engineering maka penting bagi para insinyur untuk dapat memahami dan mampu menerapkan MEH. Saat ini MEH merupakan salah satu metode numerik paling populer untuk memecahkan problem dalam domain kontinuum.

Pada dasarnya struktur adalah benda kontinum yang memiliki derajat kebebasan tak terhingga sehingga harus dinyatakan sebagai model derajat kebebasan banyak. Sistem banyak derajat kebebasan adalah sebuah sistem yang mempunyai koordinat bebas untuk mengetahui kedudukan massa lebih dari dua buah [1]. Sistem koordinat global bersifat tetap dan tidak tergantung pada orientasi suatu elemen. Dalam sistem koordinat global setiap titik nodal memiliki dua derajat kebebasan (dof) [2].

Proses inti MEH adalah membagi problem yang kompleks menjadi bagian-bagian kecil atau elemen-elemen dari mana solusi yang lebih sederhana dapat dengan

mudah diperoreh. Solusi dari setiap elemen jika digabungkan akan menjadi solusi problem secara keseluruhan.

Matriks kekakuan struktur dirakit dengan cara penjumlahan langsung dari matriks kekakuan batang serta matriks beban ekuivalen struktur dirakit dengan cara sama dari matriks beban ekuivalen pada ujung batang dengan syarat semua arah dalam sumbu struktur dan ordo matriks Sesuai koordinat struktur. Cara ini disebut metode kekakuan langsung (*direct stiffness*) [3].

Pada umumnya seorang perencana struktur akan memilih bentang prismatis yang seragam sepanjang bentangan struktur. Namun dalam kebutuhan fungsi bangunan dan nilai estetika seperti batasan luasan, tinggi bangunan dan desain interior terkadang penggunaan penampang prismatis tidak dapat dihindari sehingga dapat ditemui ukuran elemen yang berbeda sepanjang bentang. Sehingga terkadang dalam suatu struktur bangunan contohnya elemen balok, dapat ditemui tinggi atau lebar yang lebih besar dari tempat lain pada bentang yang sama. Jenis penampang balok yang tidak seragam tersebut dikenal dengan istilah balok non prismatis.

Hasil dari penelitian ini berupa matriks kekakuan untuk balok non prismatis sehingga akan mempermudah perhitungan analisa struktur jika dalam perhitungan struktur ditemui adanya balok non prismatis.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk mencari matriks kekakuan pada balok non prismatis sehingga mempermudah perhitungan struktur jika dalam perencanaan digunakan analisa struktur dengan metode matriks.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Balok sederhana yang dianalisa dengan pemisahan menjadi dua elemen akibat penampang non prismatis
2. Dua elemen balok pada satu penampang memiliki geometri dan material yang tidak seragam.
3. Setiap elemen balok non prismatis akan dimisalkan sebagai elemen aksial.

2. METODE PENELITIAN

2.1 Ruang Lingkup Penelitian

Hukum bahan adalah hukum yang mengatur hubungan antara tegangan dan regangan yang terjadi pada bahan, hal ini berkaitan dengan perubahan bentuk yang terjadi. Pada pembahasan kita yang hanya mencakup masalah *linear elastic*, maka berlaku hukum *Hooke*,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \dots\dots\dots(1)$$

dengan,

E : Modulus Elastisitas bahan

σ : Tegangan pada bahan

ϵ : Regangan yang terjadi

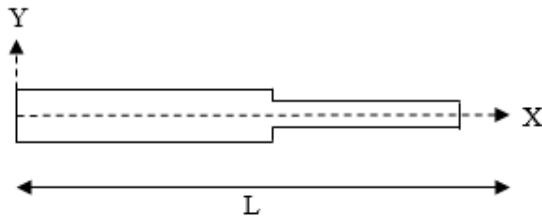
Diskritisasi adalah proses pemodelan dari struktur atau objek dengan membaginya dalam elemen-elemen kecil (*finite elemen* atau elemen hingga) yang terhubung oleh titik-titik (*nodes*) yang digunakan oleh elemen-elemen tersebut dan sebagai batas struktur atau objek.

Dalam elemen hingga persamaan dari seluruh sistem dibentuk dari penggabungan persamaan elemen-elemennya.

Untuk masalah struktur, penyelesaian yang didapat adalah deformasi (*displacement*) pada setiap titik (*nodes*) yang selanjutnya digunakan untuk mendapat besaran-besaran regangan (*strain*) dan tegangan (*stress*)

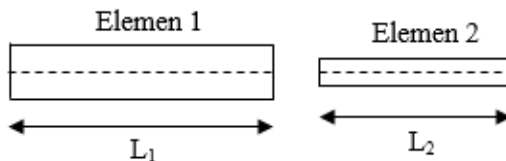
2.2 Model Struktur Balok Non Prismatic

Model balok yang akan dianalisa adalah balok non prismatic seperti yang dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Penampang balok non prismatic

Balok nonprismatic akan dibagi menjadi dua elemen akibat dari geometri dan material yang tidak seragam sepanjang bentang. Diskritisasi balok non prismatic menjadi dua elemen dapat dilihat pada gambar 2.



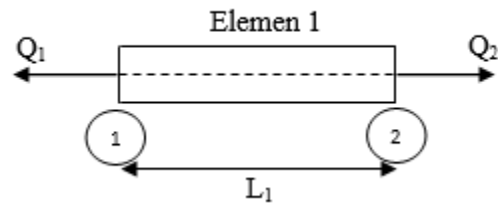
Gambar 2. Diskritisasi Elemen

Setelah balok non prismatic dibagi menjadi dua elemen akan dianalisa agar diperoleh matriks kekakuan balok non prismatic.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Elemen non prismatic adalah balok sederhana seperti pada gambar 1. Elemen non prismatic balok sederhana seperti gambar 1 akan dianalisa dengan pemisahan menjadi dua elemen. Setiap elemen akan dimisalkan sebagai elemen aksial sebagai berikut :

Elemen 1



Gambar 3. Elemen 1

Peralihan titik nodal menunjukkan translasi arah x pada nodal 1 dan 2.

Gaya nodal yang terjadi pada titik 1 dan 2 adalah

$$Q = (Q_1, Q_2) \quad (4.1)$$

Akan diasumsi bahwa peralihan u di sembarang titik pada elemen merupakan fungsi linear x , seperti berikut ini :

$$u = a_1 + a_2 x \quad (4.2)$$

Atau ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$u_{(x)} = [1 \quad x] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Konstanta a_1 dan a_2 dapat di cari dari kondisi batas:

$$\text{Pada } x = 0, u_1 = a_1$$

$$\text{Pada } x = L, u_2 = a_1 + L a_2$$

Substitusikan nilai $u_1 = a_1$ ke persamaan u_2

$$a_1 = \frac{u_1 - u_2}{L_1} \quad (4.4)$$

Masukkan nilai a_1 dan a_2 ke dalam persamaan

$$u = a_1 + a_2 x$$

Sehingga di peroleh,

$$u_{(x)} = u_1 + \left(\frac{u_1 - u_2}{L_1} \right) x$$

$$u_{(x)} = u_1 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + u_2 \left(\frac{x}{L} \right) \quad (4.5)$$

Persamaan dibuat dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$u_{(x)} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L_1} & \frac{x}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Hubungan antara peralihan u dan peralihan titik nodal δ di nyatakan oleh fungsi bentuk peralihan sebagai berikut :

$$u = N \cdot \delta \quad (4.7)$$

Karena $\delta = (u_1, u_2)$, maka

$$u_{(x)} = N \cdot \delta \quad (4.8)$$

$$u_{(x)} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L_1} & \frac{x}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Sehingga diperoleh,

$$N = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Hubungan regangan peralihan diperoleh dengan menurunkan matriks peralihan umum,

$$\varepsilon = d u \quad (4.11)$$

Persamaan (4.11) menyatakan hubungan antara vektor regangan ε dan vektor peralihan umum u .

Substitusikan persamaan (4.7) ke persamaan (4.11), diperoleh :

$$\varepsilon = d N \delta \quad (4.12)$$

$$\varepsilon = B \delta \quad (4.13)$$

Hubungan regangan peralihan,

$$\varepsilon = \varepsilon_x = d u \quad (4.14)$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN}{dx} \delta = B \delta \quad (4.15)$$

Karena $B = \frac{dN}{dx}$ maka,

$$B = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L_1} & \frac{x}{L_1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Hubungan tegangan regangan dinyatakan dalam persamaan (4.17)

$$\sigma = E \varepsilon \quad (4.17)$$

Substitusikan persamaan (4.13) ke persamaan (4.17), sehingga diperoleh :

$$\sigma = E B \delta \quad (4.18)$$

Energi regangan virtual dalam δu dapat ditulis sebagai berikut :

$$\delta u = \int_v \delta \varepsilon^T \sigma dv \quad (4.19)$$

Bila persamaan (4.13) dan persamaan (4.18), disubstitusikan ke dalam persamaan (4.19) maka akan diperoleh :

$$\delta u = \int_v \delta (B \delta)^T E B \delta dv \quad (4.19)$$

maka,

$$u = \int_v B^T \delta^T E B \delta dv$$

$$u = \delta^T \left[\int_v B^T E B dv \right] \delta$$

$$u = \delta^T \left[\int_v B^T E B dv \right] \delta$$

$$u = \delta^T K \delta \quad (4.20)$$

dengan,

$$K = \int_v B^T E B dv \quad (4.21)$$

Sehingga nilai kekakuan elemen K dapat dihitung sebagai berikut :

$$K = EA \int_0^{L_1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix}^T E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} dx$$

$$K = EA \int_0^{L_1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix}^T E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} dx$$

sehingga diperoleh :

$$K = EA \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

maka kekakuan untuk Elemen 1 adalah

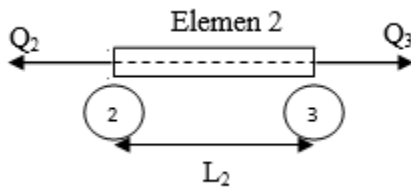
:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & -\frac{E_1 A_1}{L_1} \\ -\frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{E_1 A_1}{L_1} \end{bmatrix}$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Elemen 2



Gambar 4. Elemen 2

Seperti elemen 1 yang dimisalkan sebagai elemen aksial, maka kekakuan elemen untuk elemen 2 adalah :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{E_2 A_2}{L_2} & -\frac{E_2 A_2}{L_2} \\ -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

Atau dapat ditulis

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Dari gambar di atas, diperoleh hubungan :

Elemen 1

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Elemen 2

$$\begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Elemen 3

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Dari persamaan (4.25) dan persamaan (4.26) diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$Q_1 = K_{11}^1 D_1 + K_{12}^1 D_2 \quad (4.27a)$$

$$Q_2 = K_{21}^1 D_1 + K_{22}^1 D_2 \quad (4.27b)$$

$$Q_2 = K_{11}^2 D_2 + K_{12}^2 D_3 \quad (4.27c)$$

$$Q_3 = K_{21}^2 D_1 + K_{22}^2 D_3 \quad (4.27d)$$

Jumlahkan persamaan 4.27b dan 4.27c, maka di peroleh :

$$\begin{aligned} K_{21}^1 D_1 + K_{22}^1 D_2 + K_{11}^2 D_2 + \\ K_{12}^2 D_3 &= 0 \\ (K_{22}^1 + K_{11}^2) D_2 + K_{21}^1 D_1 + K_{12}^2 D_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jika persamaan dibagi dengan $(K_{22}^1 + K_{11}^2)$, maka diperoleh hasil sebagai berikut :

$$D_2 = \frac{-K_{21}^1 D_1}{(K_{22}^1 + K_{11}^2)} - \frac{K_{12}^2 D_3}{(K_{22}^1 + K_{11}^2)}$$

Dimisalkan $(K_{22}^1 + K_{11}^2)^{-1} = S$, maka persamaan 4.14 menjadi :

$$D_2 = -S K_{21}^1 D_1 - S K_{12}^2 D_3 \quad (4.28)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (4.28) ke dalam persamaan (4.27a) dan (4.27b), maka diperoleh :

$$\begin{aligned} Q_1 &= (K_{11}^1 - K_{12}^1 S K_{21}^1) D_1 \\ &\quad - (K_{12}^1 S K_{12}^2) D_3 \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= -(K_{21}^2 S K_{21}^1) D_1 \\ &\quad + (K_{22}^2 - K_{21}^2 S K_{12}^2) D_3 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Jika hasil Q_1 dan Q_3 dari persamaan (4.29) dan (4.30) di masukkan ke dalam matriks sebagaimana pada persamaan (4.27) maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$K_{11}^3 = K_{11}^1 - K_{12}^1 S K_{21}^1 \quad (4.31a)$$

$$K_{12}^3 = -K_{12}^1 S K_{12}^2 \quad (4.31b)$$

$$K_{21}^3 = -K_{21}^2 S K_{21}^1 \quad (4.31c)$$

$$K_{22}^3 = K_{22}^2 - K_{21}^2 S K_{12}^2 \quad (4.31d)$$

Akhirnya dapat disusun matriks kekakuan balok bertingkat sebagai berikut :

$$[K^3] = \begin{bmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Atau dapat dikaji penyusunan matriks kekakuan balok bertingkat sebagai berikut:

$$K_{11}^3 = K_{11}^1 - \frac{K_{12}^1 K_{21}^1}{K_{22}^1 + K_{11}^2}$$

$$K_{11}^3 = \frac{E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 L_2 + E_2 A_2 L_1} \quad (4.33a)$$

$$K_{12}^3 = -\frac{K_{12}^1 K_{12}^2}{K_{22}^1 + K_{11}^2}$$

$$K_{12}^3 = -\frac{E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 L_2 + E_2 A_2 L_1} \quad (4.33b)$$

$$K_{21}^3 = -\frac{K_{21}^2 K_{21}^1}{K_{22}^1 + K_{11}^2}$$

$$K_{21}^3 = -\frac{E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 L_2 + E_2 A_2 L_1} \quad (4.33c)$$

$$K_{22}^3 = K_{22}^2 - \frac{K_{21}^2 K_{12}^2}{K_{22}^1 + K_{11}^2}$$

$$K_{22}^3 = \frac{E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 L_2 + E_2 A_2 L_1} \quad (4.33d)$$

Sehingga diperoleh,

$$[K^3] = \frac{E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 L_2 + E_2 A_2 L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

4. KESIMPULAN

Dari hasil analisa yang telah dilakukan diperoleh matriks kekakuan untuk balok non prismatis sebagaimana yang terdapat pada persamaan 4.34. Dari persamaan yang dihasilkan matriks kekakuan balok non prismatis ditentukan

oleh nilai modulus elastisitas yang menggambarkan jenis bahan, dan juga luasan dan panjang bentang yang menggambarkan geometri dari penampang balok non prismatis.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] C. C. Manubulu, R. Hendrikus, and F. Ndouk, "Getaran Bebas Pada Struktur M dof Bangunan Penahan Geser," *Eternitas J. Tek. Sipil*, vol. 1, no. 1, pp. 49–57, 2020.
- [2] J. Harahap, M. Sumajouw, and S. Wallah, "Analisa Struktur Cara Kekakuan : Sebagai Alat Bantu Alternatif Dalam Perhitungan Stuktur," *J. Ilm. Media Eng.*, vol. 6, no. 3, pp. 529–534, 2016.
- [3] C. C. Manubulu, M. Mooy, I. Sampaio, and S. Serra, "ANALISA RANGKA BATANG 2D MENGGUNAKAN METODE MATRIKS KEKAKUAN STRUKTUR DAN SAP 2000," vol. 1, no. 2, pp. 11–19, 2022.